Wprowadzenie – implementacja języka WolframAlpha

Każdą spójną logicznie metodę zapisu problemów matematycznych w jednym wierszu nazywamy językiem linearnym matematyki. Portal WolframAlpha jest przykładem cybernetycznego poligloty, gdyż można się z nim kontaktować we wszystkich powszechnie znanych językach linearnych matematyki. Każdy z tych języków dokonuje interpretacji w sposób określony przez jego reguły interpretacyjne zgodne z uniwersalnymi regułami matematyki. Portal WolframAlpha jest bardzo tolerancyjny, gdyż dopuszcza komunikaty zapisane w języku łamanym, składającym się ze słów pochodzących z różnych języków linearnych. Przy interpretacji takich poleceń kieruje się własnym zestawem reguł interpretacyjnych i czasami zgłasza gotowość rozwiązania zadania innego niż zadania rozwiązywane przez osobę użytkującą ten portal. Jedynym sposobem ominięcia tych trudności jest posługiwanie się językiem o sprawdzonych interpretacjach. Przyswojenie takiego języka przebiega normalną drogą i zawsze zaczyna się od posługiwania się prostym językiem składającym się z niewielu słów. Później, w miarę podnoszenia swoich kwalifikacji matematycznych i językowych, każdy użytkownik WolframAlpha może ten język wzbogacać o dalsze słowa i zwroty. Taka jest naturalna kolej rzeczy przy nauce każdego języka.

Poniżej została przedstawiona propozycja takiego języka. Jest to język w swej składni nawiązujący do języka stosowanego w programie Mathematica® . Wybór ten jest uzasadniony przypuszczeniem, że kolejnym etapem po korzystaniu z portalu WolframAlpha jest stosowanie programu Mathematica® . Tak też przypuszcza właściciel portalu WolframAlpha będący równocześnie producentem programu Mathematica® .

Ewolucja stosowanego języka rozpoczyna się na ogół od prostych modyfikacji. Wprowadzając te modyfikacje, trzeba pamiętać między innymi, że:

> W zaproponowanym języku zastępowanie dużych liter przez małe w ogólnym przypadku jest niedopuszczalne.
>
> W ułamku dziesiętnym część całkowitą od części ułamkowej oddziela kropka.

Z drugiej strony, w pełni dopuszczalne jest zastosowanie następującej modyfikacji.

> Nawiasy kwadratowe [ ] zawsze mogą zostać zastąpione przez okrągłe ( ) i odwrotnie.

Symbole określające poszczególne działania arytmetyczne na dowolnych liczbach zostały przedstawione w tabeli W.1. W arytmetyce rozpowszechniony jest zwyczaj pomijania znaku mnożenia pomiędzy mnożonymi zmiennymi. Kultywowanie tego zwyczaju w przypadku portalu WolframAlpha prowadzi czasami do trudności z identyfikacją zapisu działań arytmetycznych. Wynika stąd kolejne ograniczenie dla zaproponowanego języka.

Nigdy nie pomijamy znaku mnożenia $*$.

W przypadku stosowania dowolnego języka linearnego obowiązują wspólne reguły arytmetyki liczb. Określają one w jednoznaczny sposób kolejność działań arytmetycznych.

Kolejność wykonywania działań arytmetycznych:
1) obliczanie wartości funkcji,
2) działania w nawiasach,
3) podnoszenie do potęgi,
4) mnożenia i dzielenia jako działania równorzędne,
5) dodawania i odejmowania jako działania równorzędne.

W przypadku wielokrotnych działań równoważnych opisanych w punktach 3) i 4) wykonuje je się w kolejności od lewej do prawej. Kolejność ta ma istotne znaczenie w przypadku, kiedy pojawiają się dzielenia.
W przypadku wielokrotnego potęgowania potęgujemy w kolejności od prawej do lewej.

Przykład W.1. Poniższe polecenia wykonujemy w następujący sposób:

`(Cos[Pi]+3)^2+2*3*4`

$(\cos\pi+3)^2+2\cdot3\cdot4=(-1+3)^2+6\cdot4=2^2+24=4+24=28,$

`2^3^4`

$2^{3^4}=2^{81}=2417851639229258349412352,$

`10/5*2`

$10:5\cdot2=2\cdot2=4.$ □

W poniższej tabeli przedstawiono wszystkie te symbole i polecenia, które znajdują zastosowanie przy rozwiązywaniu problemów matematycznych opisanych w tej książce. W pewnych sytuacjach, ze względu na złożoność opisu, musieliśmy się jedynie odwołać do odpowiednich stron podręcznika. Każde polecenie zapisujemy w linii poleceń przedstawionych na rysunku W.1 i zatwierdzamy poprzez naciśnięcie przycisku .

Rysunek W.1.

Tabela W.1.

Znaczenie	**Symbol/komenda**	**Przykład**	**Interpretacja przykładu**
alternatywa	`||`	`p||q`	$p \vee q$
asymptoty	`Asymptotes[F[x]]`	`Asymptotes[1/x]`	
arcus tangens	`Atan[x]`	`Atan[1]`	$\operatorname{arctg} 1$
całka nieoznaczona	`int F[x]dx`	`int (2x+x^(1/2))/x^2dx`	$\int \frac{2x+\sqrt{x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$
całka oznaczona	`int F[x]dx from a to b`	`int x^2*Log[x]dx from 1 to E`	$\int_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln x \,\mathrm{d}x$
cosinus	`Cos[x]`	`Cos[Pi/2]`	$\cos\frac{\pi}{2}$
cotangens	`Cot[x]`	`Cot[Pi/3]`	$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$
digraf	str. 60		
dodawanie liczb	`+`	`a+b`	$a+b$
dodawanie macierzy	`+`	`({1,2},{3,4})+({5,6},{7,8})`	$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}$
druga pochodna	`D[D[F[x],x],x]`	`D[D[x^2+5*x,x],x]`	$(x^2+5\cdot x)''$
druga pochodna	`(F[x])''`	`(x^2+5*x)''`	$(x^2+5\cdot x)''$
druga pochodna w punkcie	`D[D[F[x],x],x] for x=a`	`D[D[F[x],x],x] for x=3`	$F''(3)$
dziedzina funkcji	`Domain[F[x] ]`	`Domain[Sqrt[x]]`	
dzielenie liczb	`/`	`a/b`	$a:b$
funkcja wykładnicza	`Exp[x]`	`Exp[4]`	e^4
graf	str. 56		
granica	`limF[x],x->c`	`limx^2,x->3`	$\lim\limits_{x\to 3} x^2$
granica lewostronna	`limF[x],x->c-`	`limx^2,x->3-`	$\lim\limits_{x\to 3^-} x^2$
granica lewostronna	`limF[x],x->Inf`	`limx^2,x->Inf`	$\lim\limits_{x\to \infty} x^2$
granica prawostronna	`limF[x],x->c+`	`limx^2,x->3+`	$\lim\limits_{x\to 3^+} x^2$
granica prawostronna	`limF[x],x->-Inf`	`limx^2,x->-Inf`	$\lim\limits_{x\to -\infty} x^2$
Iloczyn skalarowy[1]	`*`	`(1,2)*(2,4)`	$(1;2)\circ(3;4)$
implikacja	`=>`	`p=>q`	$p \implies q$
koniunkcja	`&&`	`p&&q`	$p \wedge q$
liczba Neppera	`E`		e
liczba pi	`Pi`		π
liniowa niezależność	`Linearindependence[ ]`	`Linearindependence [(1,2), (3,4)]`	
logarytm naturalny	`Log[x]`	`Log[12]`	$\ln 12$

[1] Miałem to szczęście, że matematyki nauczyli mnie lwowscy profesorowie. Tłumaczyli nam zawsze, że właściwym dla języka polskiego jest słowo „skalarowy”.

logarytm z dowolną podstawą	`Log[a,x]`	`Log[2,12]`	$\log_2 12$
macierz	str. 101	`({1,2,3},{4,5,6})`	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$
macierz jednostkowa	`IdentityMatrix[n]`	`IdentityMatrix[2]`	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
macierz odwrotna	`Inverse[A]`	`Inverse({1,2},{3,4})`	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$
macierz transponowana	`Transpose[A]`	`Transpose[({1,2,3}, {4,5,6})]`	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$
maksimum globalne	`Max F[x] from a to b`	`Max x^2 from 1 to 2`	$\max\limits_{1\leqslant x\leqslant 2} x^2$
metoda eliminacji Gaussa-Jordana	`Rowreduce[A]`	`Rowreduce [({1,2,3},{4,5,6})]`	
miejsca zerowe funkcji	`Roots[F[x]]`	`Roots[Sqrt[x]]`	
minimum globalne	`Min F[x] from a to b`	`Min x^2 from 1 to 2`	$\min\limits_{1\leqslant x\leqslant 2} x^2$
„mniejsze niż”	`<`	`a<b`	$a < b$
„mniejsze równe niż”	`<=`	`a<=b`	$a \leqslant b$
mnożenie liczb	`*`	`a*b`	$a \cdot b$
mnożenie macierzy	`*`	`({1,2},{3,4})* ({5,6},{7,8})`	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$
mnożenie macierzy przez liczbę	str. 102	`2*({1,2,3}, {4,5,6})`	$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$
negacja	`!`	`!p`	$\neg p$
nieskończoność	`Inf`		∞
odejmowanie liczb	`-`	`a-b`	$a - b$
pierwiastek kwadratowy	`Sqrt[x]`	`Sqrt[x+6]`	$\sqrt{x+6}$
pochodna	`D[F[x],x]`	`D[x^2+5*x],x]`	$(x^2 + 5 \cdot x)'$
pochodna	`(F[x])'`	`(x^2+5*x)'`	$(x^2 + 5 \cdot x)'$
pochodna cząstkowa	`D[F[x,…,z],x]`	`D[x*z*y, x]`	$\frac{\partial}{\partial x}(x \cdot y \cdot z)$
pochodna cząstkowa II rzędu	`D[D[F[x,…,z],x],y]`	`D[D[x*z*y, x],z]`	$\frac{\partial^2}{\partial z \partial x}(x \cdot y \cdot z)$
pochodna w punkcie	`D[F[x],x] for x=a`	`D[F[x],x] for x=3`	$F'(3)$
pole pomiędzy krzywymi	`area between y=F[x],y=G[x],..y=H[x]`	`area between y=2*x,y=x^2`	

potęgowanie liczb	`^`	`a^b`	a^b
„równa się”	`=`	`a=b`	$a = b$
równoważność	`<=>`	`p<=>q`	$p \iff q$
„różne”	`!=`	`a!=b`	$a \neq b$
rząd macierzy	`Rank[A]`	`Rank[({1,2,3},{4,5,6})]`	
silnia	`Fact[n]`	`Fact[5]`	5!
sinus	`Sin[x]`	`Sin[Pi/2]`	$\sin \frac{\pi}{2}$
szereg	`Sum[a(n),{n,m}]`	`Sum[n^2,{n,5}]`	$\sum_{n=1}^{5} n^2$
symbol Newtona	`Bin[n,k]`	`Bin[10,2]`	$\binom{10}{2}$
tangens	`Tan[x]`	`Tan[Pi/4]`	$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$
tautologia	`TautologyQ[ ]`	`TautologyQ[p=>!p]`	str. 13
wartość bezwzględna	`Abs[x]`	`Abs[x]`	$\|x\|$
wartość bieżąca	`present value`	str. 309	
wartość bieżąca netto	`net present value`	str. 312	
wartość funkcji	`F[x]`	`Sin[x]`	$\sin x$
wartość przyszła	`future value`	str.301	
wektor	str. 106	`(1,2,3)`	$(1,2,3)^{\mathrm{T}}$
wewnętrzna stopa zwrotu	`internal rate of return`	str. 317	
„większe niż”	`>`	`a>b`	$a > b$
„większe równe niż”	`≥`	`a≥b`	$a \geqslant b$
wykres funkcji	`Plot F[x]`	`Plot x^3`	
wykres funkcji w przedziale	`Plot F[x] from a to b`	`Plot x^3 from -1 to 2`	
wyraz ciągu	`a(n)`	`a(12)`	a_{12}
wyznacznik macierzy	`Det[A]`	`Det({1,2},{3,4})`	$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right)$
zbiór wartości funkcji	`Range[F[x]]`	`Range[Sqrt[x]]`	

Dalszych inspiracji do doskonalenia zaproponowanego języka należy szukać przede wszystkim w podręcznikach programu Mathematica® .

Rozdział 1. Logika matematyczna

1.1. Podstawy logiki

Stwierdzeniem w logice nazywamy dowolne zdanie twierdzące opisujące właściwości dowolnych, zdefiniowanych uprzednio, obiektów. Wynika z tego, że żadna definicja nie jest stwierdzeniem. Szczególnym przypadkiem stwierdzeń są stwierdzenia porównujące liczby i zmienne. Stwierdzenia te nazywamy porównaniami ilościowymi. Najczęściej stosowane porównania ilościowe zostały przedstawione w tabeli 1.1. Tam też przedstawiono implementację WOLFRAM i implementację EXCEL tych porównań. Implementacje kolejnych istotnych z punktu widzenia matematyki stwierdzeń będą podane tam, gdzie te stwierdzenia zostaną opisane.

Tabela 1.1. Porównania ilościowe i ich implementacje programowe

Porównanie	Objaśnienie	WOLFRAM	EXCEL
$\mathbf{a} = \mathbf{b}$	**a** jest równe **b**	`a==b`	`a=b`
$\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$	**a** jest różne od **b**	`a!=b`	`a<>b`
$\mathbf{a} > \mathbf{b}$	**a** jest większe od **b**	`a>b`	`a>b`
$\mathbf{a} \geqslant \mathbf{b}$	**a** jest większe równe **b**	`a>=b`	`a>=b`
$\mathbf{a} < b$	**a** jest mniejsze od **b**	`a<b`	`a<b`
$\mathbf{a} \leqslant \mathbf{b}$	**a** jest mniejsze równe **b**	`a<=b`	`a<=b`

Przykład 1.1. W tabeli 1.2 przedstawiono przykłady stwierdzeń. W przypadku porównań ilościowych opisano tam także implementację. □

Zdaniem w logice nazywamy każde stwierdzenie, o którym można orzec, czy jest prawdziwe, czy też fałszywe. Sposób rozstrzygnięcia o prawdziwości lub fałszywości zdania stanowi przedmiot rozważań filozofii. Pośród wyrażeń języka potocznego zdaniami mogą być jedynie zdania oznajmujące (np.: „Jan lubi banany”, „Warszawa jest stolicą Islandii”). Nie są zdaniami pytania, polecenia, prośby czy też wyrażenia ustalające pewne normy (np.: „Należy jeść banany”). Zdaniami nie są też prognozy (np.: „Jutro będzie padał deszcz”) oraz definicje (np.: „Tydzień kalendarzowy to kolejne dni od poniedziałku do niedzieli”).

Tabela 1.2. Przykłady stwierdzeń i ich implementacje

Pozycja	**Stwierdzenie**	**WOLFRAM**	**EXCEL**
a)	$3 = 4$	`3==4`	3=4
b)	$x + 3 \neq 5$	`x+3!=5`	x+3<>5
c)	$2 + 5 > 4$	`2+5>4`	2+5>4
d)	$6 \geqslant 10$	`6>=10`	6>=10
e)	$3 \in \{1; 2; 3; 4\}$		
f)	Warszawa jest stolicą Islandii		

Każdemu ze zdań prawdziwych przypisujemy wartość logiczną **PRAWDA**. Każdemu ze zdań fałszywych przypisujemy wartość logiczną **FAŁSZ**. W dalszych rozważaniach wartość **PRAWDA** oznaczać będziemy za pomocą symbolu $\boldsymbol{T}$, a wartość **FAŁSZ** za pomocą symbolu $\boldsymbol{F}$.

W wielu polskich podręcznikach matematyki wartość **PRAWDA** jest oznaczana za pomocą symbolu **1**, a wartość **FAŁSZ** za pomocą symbolu **0**. Jest to podejście różniące się od współczesnych międzynarodowych standardów dydaktycznych.

Tabela 1.3. Implementacja programowa wartości logicznych

Wartość logiczna	**Logika**	**WOLFRAM**	**EXCEL***
PRAWDA	$\boldsymbol{T}$	`True`	PRAWDA
FAŁSZ	$\boldsymbol{F}$	`False`	FAŁSZ
*W arkuszu EXCEL wartość logiczną wybranych zdań można ustalić, stosując podstawienie =P, gdzie symbol P oznacza oceniane zdanie.			

Przykład 1.2. Stwierdzenie b) z przykładu 1.1 nie jest zdaniem. Pozostałe stwierdzenia są zdaniami. Zdania a), d) i f) są fałszywe, a więc przypisujemy im wartość logiczną $\boldsymbol{F}$. Zdania c) i e) są zdaniami prawdziwymi, a więc przypisujemy im wartość logiczną $\boldsymbol{T}$. W arkuszu kalkulacyjnym EXCEL wartość logiczną trzech pierwszych zdań można ustalić, stosując odpowiednio podstawienia:

=3=4
=2+5>4
=6>=10. □

W logice podstawą do rozważań są zdania proste mające określoną wartość logiczną. W logice matematycznej poszczególne zdania proste oznaczać będziemy małymi literami, np.: p, q, r, s itp. Poszczególne zdania proste mogą być przekształcone lub połączone za pomocą spójników logicznych. Sposób tego przekształcenia może zostać opisany przy użyciu definicji właściwej lub definicji F–T. Uzyskane w ten sposób zdania nazywamy zdaniami złożonymi. Definicje F–T są jedynie równoważnym formalnym zapisem właściwej definicji. Definicje F–T zostały podane w tabeli 1.4.

Tabela 1.4. Definicje F–T zdań złożonych

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
F	***F***	***T***	***F***	***F***	***T***	***T***
F	***T***	***T***	***T***	***F***	***T***	***F***
T	***F***	***F***	***T***	***F***	***F***	***F***
T	***T***	***F***	***T***	***T***	***T***	***T***

Negacja zdania prostego p oznaczana symbolem $\neg p$ jest prawdziwa jedynie wtedy, kiedy zdanie proste jest fałszywe. Zdanie złożone $\neg p$ czytamy „nieprawda, że p”.

Alternatywa zdań prostych p i q oznaczana symbolem $p \vee q$ jest prawdziwa jedynie wtedy, kiedy przynajmniej jedno ze zdań prostych jest prawdziwe. Zdanie złożone $p \vee q$ czytamy „p lub q”.

Koniunkcja zdań prostych p i q oznaczana symbolem $p \wedge q$ jest prawdziwa jedynie wtedy, kiedy każde ze zdań prostych jest prawdziwe. Zdanie złożone $p \wedge q$ czytamy „p i q”.

Implikacja zdania prostego q ze zdania prostego p oznaczana symbolem $p \Rightarrow q$ jest fałszywa jedynie wtedy, kiedy prawdziwe zdanie proste p implikuje fałszywe zdanie proste q. Zdanie złożone $p \Rightarrow q$ czytamy „jeśli p, to q”.

Równoważność zdań prostych p i q oznaczana symbolem $p \Leftrightarrow q$ jest prawdziwa jedynie wtedy, kiedy oba zdania proste są równocześnie prawdziwe lub równocześnie fałszywe. Zdanie złożone $p \Longleftrightarrow q$ czytamy „p wtedy i tylko wtedy, gdy q”.

Dla jednoznaczności określonych powyżej działań niezbędne jest określenie ich kolejności. Obowiązuje tutaj następujący schemat.

Kolejność wykonywania działań logicznych:
1) wartości logiczne zdań prostych,
2) działania w nawiasach,
3) negacje,
4) alternatywy i koniunkcje jako działania równorzędne,
5) implikacje,
6) równoważności. W przypadku wielokrotnych działań równoważnych wykonuje je się w kolejności od lewej do prawej. Kolejność ta ma istotne znaczenie w przypadku wielokrotnych implikacji.

W portalu WolframAlpha tylko kolejność negacji, alternatyw i koniunkcji jest niezawodnie zachowana. W przypadku stosowania implikacji i równoważności warto oczekiwaną kolejność działań określić, używając nawiasów.

Przykład 1.3. Wartość logiczna zdania $p \Rightarrow q \vee r \wedge s \Rightarrow \neg q \Leftrightarrow s$ jest identyczna z wartością logiczną zdania $((p \Rightarrow ((q \vee r) \wedge s)) \Rightarrow (\neg q)) \Leftrightarrow s$. □

Przykład 1.4. W arkuszu kalkulacyjnym EXCEL wartość logiczną równoważności:

$$3 = 4 \Leftrightarrow 2 + 5 > 4$$

można ustalić, stosując podstawienie:

R=((3=4)=(2+5>4)).

W portalu WolframAlpha wartość logiczną powyższej równoważności ustalamy, wykonując instrukcję:

```
(3==4)<=>(2+5>4).
```

□

Tabela 1.5. Implementacja programowa zdań złożonych

Zdanie złożone	**WOLFRAM**	**EXCEL***
$\neg p$	`!p`	=NIE(P)
$p \vee q$	p||q	=LUB(P;Q)
$p \wedge q$	p&&q	=ORAZ(P;Q)
$p \Rightarrow q$	p=>q	=LUB(NIE(P);Q)
$p \Leftrightarrow q$	p<=>q	=(P=Q)

*W arkuszu kalkulacyjnym Excel poszczególne symbole oznaczają: P – zdanie proste p, Q – zdanie proste q.

Zastosowania logiki matematycznej w dowolnej dyscyplinie wiedzy sprowadzają się do stosowania zdań prawdziwych. Szczególnymi przypadkami zdań prawdziwych są tautologie.

Tautologią nazywamy takie zdanie złożone, które jest zawsze prawdziwe w sposób niezależny od wartości logicznej zdań prostych składających się na to zdanie.

Inaczej mówiąc, tautologie są to zdania złożone zawsze prawdziwe. Tautologie nazywamy też inaczej prawami rachunku zdań. Poniżej przedstawiamy listę najbardziej znanych praw rachunku zdań. Symbol $\check{\boldsymbol{T}}$ przyjęto tutaj dla oznaczenia prawdziwego zdania prostego, zaś symbol $\check{\boldsymbol{F}}$ dla oznaczenia fałszywego zdania prostego.

Prawo wyłączonego środka:

$$p \wedge \neg p \Leftrightarrow \check{\boldsymbol{F}}. \tag{1.1}$$

Tautologia ta mówi nam, że nie mogą jednocześnie być prawdziwe zdanie i jego zaprzeczenie.

Prawo dopełnienia:

$$p \vee \neg p \Leftrightarrow \check{\boldsymbol{T}}. \tag{1.2}$$

Tautologia ta informuje nas, że zawsze jedno z dwóch zdań: zdanie lub jego zaprzeczenie jest prawdziwe. Prawo to jest odpowiednikiem reguły *tertium non datur*[1].

Prawo podwójnego zaprzeczenia:

$$p \Leftrightarrow \neg(\neg p). \tag{1.3}$$

[1] Z łaciny: trzeciej możliwości nie ma.

Prawa De Morgana:

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q, \tag{1.4}$$
$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q. \tag{1.5}$$

Prawa przemienności:

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p, \tag{1.6}$$
$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p. \tag{1.7}$$

Prawa łączności:

$$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r, \tag{1.8}$$
$$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r. \tag{1.9}$$

Prawa rozdzielności:

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r), \tag{1.10}$$
$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r). \tag{1.11}$$

Prawa tautologii:

$$p \vee p \Leftrightarrow p, \tag{1.12}$$
$$p \wedge p \Leftrightarrow p. \tag{1.13}$$

Prawa pochłaniania:

$$p \vee \check{\boldsymbol{T}} \Leftrightarrow \check{\boldsymbol{T}}, \tag{1.14}$$
$$p \wedge \check{\boldsymbol{T}} \Leftrightarrow p. \tag{1.15}$$

Prawa konfabulacji:

$$p \vee \check{\boldsymbol{F}} \Leftrightarrow p, \tag{1.16}$$
$$p \wedge \check{\boldsymbol{F}} \Leftrightarrow \check{\boldsymbol{F}}. \tag{1.17}$$

Tautologie od (1.3) do (1.17) znajdują swe główne zastosowanie przy przekształcaniu złożonych zdań logicznych. Z przekształceniami takimi mamy do czynienia między innymi, prowadząc rachunek zbiorów lub rozwiązując układy równań nieliniowych.

Prawo eliminacji implikacji:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q). \tag{1.18}$$

Tautologia ta została już zastosowana powyżej do określenia wartości logicznej implikacji w implementacjach arkusza EXCEL.