# Badania operacyjne z wykorzystaniem WinQSB

Fragment

binarną są określane mianem zadania programowania binarnego. W stosunku do dyskretnych modeli decyzyjnych stosuje się odrębną klasę metod ich rozwiązywania.

W dalszych częściach niniejszego rozdziału zostaną zaprezentowane przykładowe zadania programowania liniowego i ich rozwiązania za pomocą metod geometrycznej oraz analitycznej wraz z pełną analizą i interpretacją uzyskanych wyników. Do ich rozwiązania wykorzystano oprogramowanie WinQSB wspomagające rozwiązywanie wielu zadań decyzyjnych za pomocą metod i modeli badań operacyjnych. Moduł programowania liniowego WinQSB umożliwia wyznaczenie rozwiązania optymalnego zarówno metodą geometryczną, jak i analityczną. Czytelnika zainteresowanego aspektami teoretycznymi programowania liniowego, w tym prezentacją algorytmu simpleks, odsyłamy do szeroko dostępnej literatury przedmiotu (np. [Siudak M., 2012]).

## 1.2. Rozwiązywanie zadań programowania liniowego metodą geometryczną

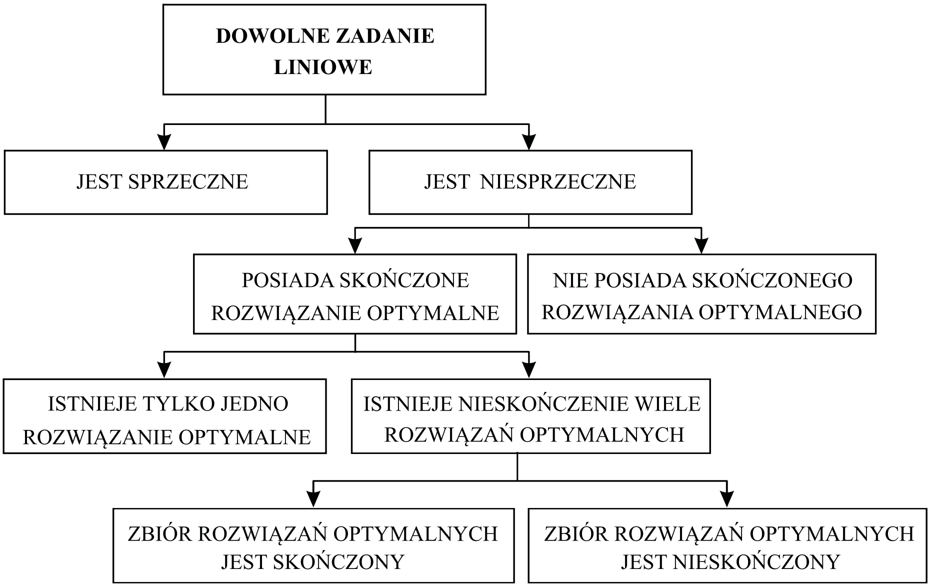
Dowolne rozwiązanie $x_1, x_2, \ldots, x_n$, spełniające układ równań i nierówności (1.2) jest rozwiązaniem dopuszczalnym zadania. Zbiór wszystkich rozwiązań dopuszczalnych, czyli zbiór rozwiązań układu równań i nierówności (1.2) będziemy dalej oznaczać przez $X$.

Rozwiązania bazowe układu warunków (1.2) będziemy nazywać dopuszczalnymi rozwiązaniami bazowymi, jeżeli spełniają one dodatkowo warunek brzegowy: $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$.

Rozwiązania optymalnego należy poszukiwać wśród bazowych rozwiązań dopuszczalnych układu ograniczeń. Ponieważ wektor bazowych rozwiązań dopuszczalnych jest punktem wierzchołkowym zbioru rozwiązań dopuszczalnych ($X$), więc rozwiązanie optymalne leży w jednym z wierzchołków zbioru rozwiązań układu równań i nierówności, a w szczególnym przypadku również na całej krawędzi tego zbioru. Rozwiązaniem optymalnym zadania programowania liniowego na maksimum (minimum) jest to rozwiązanie, które spośród bazowych rozwiązań dopuszczalnych osiąga największą (najmniejszą) wartość funkcji celu. W przypadku, gdy zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest pusty ($X = \emptyset$), zadanie jest sprzeczne. Klasyfikację możliwych wyników rozwiązania zadania liniowego przedstawiono na rys. 1.1.

Rozwiązanie zadania liniowego metodą geometryczną polega na:

- graficznym wyznaczeniu zbioru rozwiązań dopuszczalnych (graficzne rozwiązanie układu równań i nierówności stanowiących układ warunków ograniczających),
- graficznym wyznaczeniu punktu (punktów) optymalnego poprzez wyznaczenie kilku warstwic funkcji celu.




**Rysunek 1.1.** Klasyfikacja możliwych wyników rozwiązania zadania programowania liniowego

Źródło: opracowanie własne.

Należy podkreślić, iż moduł programowania liniowego programu WinQSB automatycznie znajduje warstwicę funkcji celu w punkcie (punktach) odpowiadającym najmniejszej wartości funkcji kryterium dla zadania na minimum lub odpowiadającym największej wartości funkcji kryterium dla zadania na maksimum.

Za pomocą kolejnych przykładów z zakresu zarządzania i organizacji produkcji przeanalizujemy możliwości uzyskania wyników rozwiązania zadania programowania liniowego.

**Przykład 1.1.**
Przedsiębiorstwo produkuje dwa rodzaje produktów ($P_1$ i $P_2$). Zysk ze sprzedaży jednej tony produktu $P_1$ wynosi 1000 złotych, a z jednej tony produktu $P_2$ 2000 złotych. Do produkcji są wykorzystywane dwa surowce: $S_1$ i $S_2$, których ilość dostępna w ciągu jednej doby wynosi odpowiednio 8 ton i 3 tony. Ilości surowców (w tonach) wykorzystywane do produkcji jednej tony produktu $P_1$ i jednej tony produktu $P_2$ zamieszczono w tabeli 1.1. Oba wyroby charakteryzują się wysoką podzielnością.

**Tabela 1.1.** Zapotrzebowanie na surowce do produkcji oraz ich dostępne zasoby

| Produkt / Surowiec | $P_1$ | $P_2$ | Dostępne zasoby |
|---|---|---|---|
| $S_1$ [tony] | 2 | 2 | 8 |
| $S_2$ [tony] | 0 | 1 | 3 |

Źródło: opracowanie własne.

Ile ton dziennie należy produkować produktów $P_1$ i $P_2$, aby zysk ze sprzedaży był największy?

**Rozwiązanie**

Oznaczamy przez $x_1$ (zmienna decyzyjna 1) ilość ton produkcji produktu $P_1$, a przez $x_2$ (zmienna decyzyjna 2) ilość ton produktu $P_2$. Zadanie programowania liniowego przyjmuje postać poniższego modelu

$$z = 1000x_1 + 2000x_2 \rightarrow \max, \tag{1.5}$$

przy warunkach ograniczających

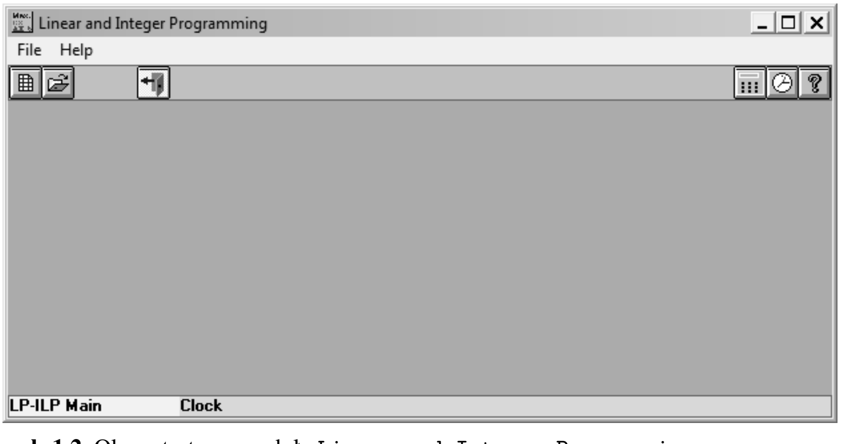
$$2x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \tag{1.6}$$
$$x_2 \leqslant 3 \tag{1.7}$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0. \tag{1.8}$$

Funkcja celu określa poszukiwanie takiej struktury produkcji, aby uzyskać największy (maksymalny) zysk ze sprzedaży produktów $P_1$ i $P_2$.

Pierwszy warunek ograniczający oznacza, iż nie można wykorzystać więcej niż 8 ton zasobu surowca $S_1$, który do produkcji 1 tony produktu $P_1$ jest wykorzystywany w ilości 2 ton, a do produkcji 1 tony produktu $P_2$ również w ilości 2 ton. Drugi warunek ograniczający zakłada, iż do produkcji 1 tony produktu $P_2$ jest wykorzystywana 1 tona surowca $S_2$, którego ilość jest limitowana do 3 ton.

Trzeci warunek ograniczający został wprowadzony ze względu na to, iż przedsiębiorstwo nie może wyprodukować ujemnej wielkości produktów $P_1$ i $P_2$ (warunek nieujemności zmiennych decyzyjnych). Tego typu warunki ograniczające określa się mianem warunków brzegowych.

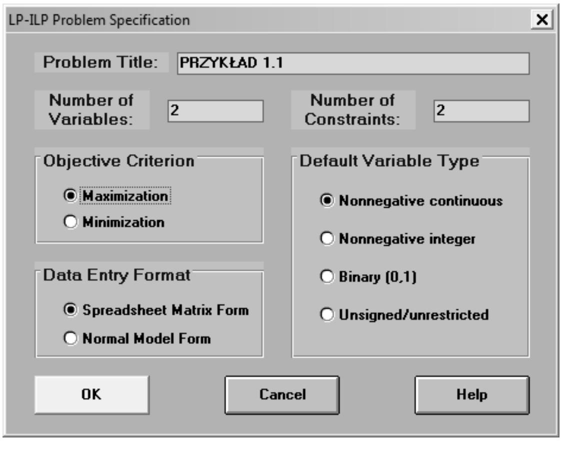
Do rozwiązania powyższego zadania decyzyjnego zastosujemy moduł programowania liniowego programu WinQSB. W tym celu należy uruchomić program, wybierając z listy dostępnych programów polecenie `WinQSB` i dalej moduł `Linear and Integer Programming` (programowanie liniowe i całkowitoliczbowe). Po uruchomieniu programu pojawi się okno jak na rys. 1.2.




**Rysunek 1.2.** Okno startowe modułu `Linear and Integer Programming` programu WinQSB

Po uruchomieniu programu, użytkownik ma do wyboru dwie opcje: 1) wprowadzić nowy problem decyzyjny (od początku); 2) załadować uprzednio wprowadzony i zapisany problem decyzyjny. Aby wprowadzić od początku nowy problem do programu, należy wybrać z menu polecenie `File/New problem`. Zostanie wówczas wyświetlone okno (rys. 1.3), w którym dokonuje się specyfikacji problemu. W oknie tym należy określić:

- tytuł problemu (`Problem Title`),
- liczbę zmiennych występujących w modelu (`Number of Variables`),
- liczbę warunków ograniczających (`Number of Constraints`),
- ekstremum funkcji celu (`Objective Criterion`) – kryterium funkcji celu może zostać określone jako maksimum (`maximization`) lub minimum (`minimization`),
- domyślny typ zmiennych (`Default Variable Type`) – typ może zostać określony jako zmienna nieujemna ciągła (`Nonnegative continuous`), zmienna nieujemna całkowitoliczbowa (`Nonnegative integer`), zmienna binarna (`Binary (0, 1)`), zmienna nieograniczona ciągła (`Unsigned/unrestricted`),
- format wprowadzania danych (`Data Entry Format`) – może to być formularz skoroszytu (`Spreadsheet Matrix Form`) bądź formularz modelu (`Normal Model Form`).



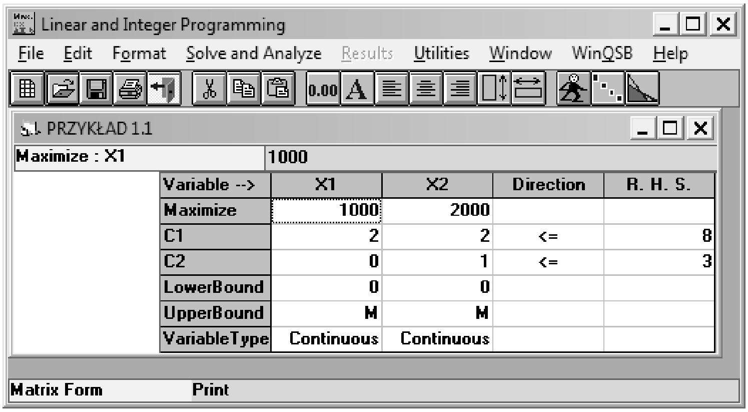

**Rysunek 1.3.** Okno specyfikacji nowego problemu decyzyjnego

Oczywiście na dalszym etapie pracy z programem można dokonywać zmian specyfikacji, łącznie ze zmianą ekstremum funkcji celu, dodawaniem/usuwaniem zmiennych, warunków ograniczających czy zmianą typu zmiennych.

Model decyzyjny zapisany za pomocą równań (1.5)–(1.8) zawiera dwie zmienne decyzyjne oraz dwa warunki ograniczające, a funkcja celu dąży do maksimum. W tym miejscu należy zaznaczyć, że do programu WinQSB nie ma sensu wprowadzać dodatkowo warunku brzegowego (1.8), ponieważ warunek nieujemności zmiennych jest spełniony poprzez określenie ich typu jako zmiennych nieujemnych ciągłych (`Nonnegative continuous`). Zmienne decyzyjne są oczywiście zmiennymi ciągłymi ze względu na założenie ich nieskończonej podzielności[2]. Każda zmienna typu ciągłego może przyjąć dowolną wartość ze zbioru liczb rzeczywistych.

[2] Modele, w których występują zmienne całkowitoliczbowe, będą omawiane w podrozdziale 1.4.

Preferowanym formatem wprowadzania danych jest zwykły skoroszyt, przypominający arkusz kalkulacyjny MS Excel. Po zatwierdzeniu (przycisk `OK`) przechodzimy do formularza wprowadzania parametrów zadania decyzyjnego programowania liniowego, co zaprezentowano na rys. 1.4.




**Rysunek 1.4.** Arkusz służący do wprowadzania parametrów zadania programowania liniowego z przykładu 1.1

Arkusz wprowadzania parametrów zadania programowania liniowego jest skonstruowany w postaci tabeli, której kolumny składają się z kolejnych zmiennych decyzyjnych. Domyślnie są one określane symbolem `X` z kolejnymi numerami porządkowymi (w tym przypadku mamy `X1` i `X2`). Ostatnie dwie kolumny służą do określania kierunku nierówności (ewentualnie określenia równości) warunków ograniczających (`Direction`) oraz wartości wyrazów wolnych tychże warunków (`R. H. S.`)[3].

Pierwszy wiersz dotyczy tylko i wyłącznie funkcji celu, kolejne zaś – poszczególnych warunków ograniczających. Domyślnie są one oznaczone literą `C` (od słowa *constraint*) z kolejnymi liczbami porządkowymi (w analizowanym przykładzie są to `C1` i `C2`). Ostatnie trzy wiersze służą do określania typu zmiennych: dolne ograniczenie (`LowerBound`), górne ograniczenie (`UpperBound`) i typ zmiennych (`Variable Type`). Dla górnego ograniczenia oraz symetrycznie dla dolnego ograniczenia mogą pojawić się następujące symbole: $M$ i $-M$. Symbol $M$ oznacza bardzo dużą liczbę (oznaczenie zostało wprowadzone w metodzie kar[4] wyznaczania początkowego dopuszczalnego rozwiązania bazowego), tak dużą, że w przypadku, gdy parametr $a$ jest liczbą dodatnią, to dla dowolnych liczb $a, b \in R$ spełniona będzie nierówność $aM - b > 0$. Przykładowe nierówności

$$0{,}00001M - 1\,000\,000\,000 > 0$$

lub

$$-0{,}00001M + 1\,000\,000\,000 < 0$$

są spełnione za względu na liczbę $M$.

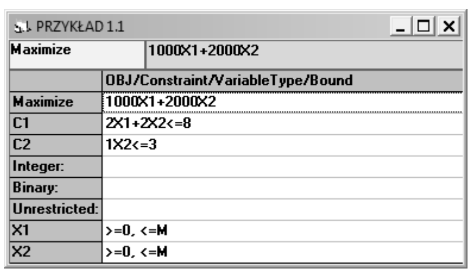
[3] Czyli wartości prawych stron układu równań i nierówności, stąd też skrót `R. H. S.` (`Right Head Side`).

[4] Metoda kar zostanie omówiona w podrozdziale 1.3.

Dla każdej zmiennej decyzyjnej można dokonać zmiany jej typu poprzez dwukrotne kliknięcie w komórkę zawierającą typ zmiennej. Wówczas automatycznie zmianie ulegają dolne i górne ograniczenie. W podobny sposób można dokonywać zmiany kierunku nierówności (lub zmiany na równość i odwrotnie) poszczególnych warunków ograniczających[5].

Oczywiście każde nowo wprowadzone zadanie decyzyjne może zostać zapisane lub wydrukowane (opcje z menu `File`). Do aktualnego zadania można wprowadzać odpowiednie modyfikacje za pomocą poleceń z menu `Edit`:
– zmiana tytułu problemu (`Problem Name`),
– zmiana nazw zmiennych decyzyjnych (`Variable Names`),
– zmiana nazw warunków ograniczających (`Constraint Names`),
– zmiana ekstremum funkcji celu (`Objective Function Creation`),
– dołączenie nowej zmiennej decyzyjnej (`Insert a Variable`),
– usunięcie zmiennej decyzyjnej (`Delete a Variable`),
– dołączenie nowego warunku ograniczającego (`Insert a Constraint`),
– usunięcie warunku ograniczającego (`Delete a Constraint`).

Można także przełączyć tryb wprowadzania danych zadania decyzyjnego na formularz modelu (co pokazano na rys. 1.5), wybierając z menu `Format` polecenie `Switch to Normal Model Form`.

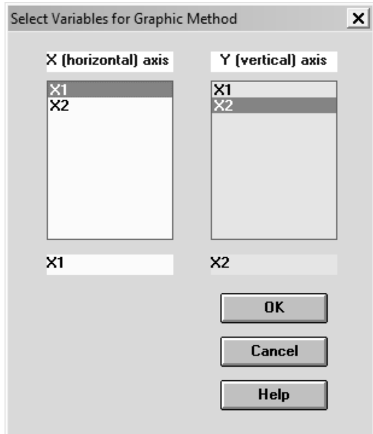



**Rysunek 1.5.** Formularz modelu dla zadania programowania liniowego z przykładu 1.1

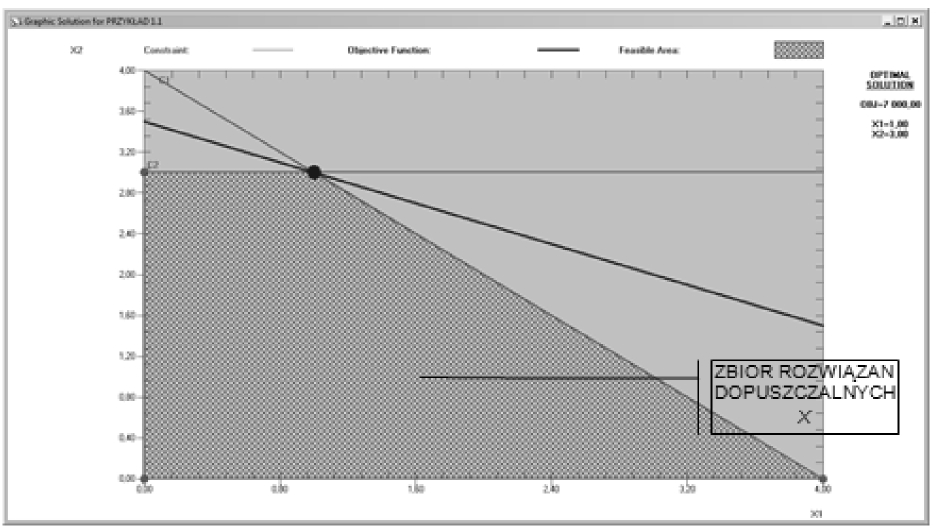
Na rysunku 1.5. został przedstawiony model decyzyjny programowania liniowego z przykładu 1.1, którego odpowiednikiem jest model na rys. 1.4. Ponieważ zadanie opisane równaniami (1.5)–(1.8) zawiera dwie zmienne decyzyjne, zatem można je rozwiązać metodą geometryczną w układzie współrzędnych (dwuwymiarowa przestrzeń geometryczna). Niezależnie od rodzaju formularza wprowadzania danych, aby rozwiązać zadanie metodą geometryczną należy wybrać z menu `Solve and Analyze` polecenie `Graphic Method`. Wyświetlone zostanie okno dialogowe (rys. 1.6) służące do przypisania każdej z dwóch zmiennych decyzyjnych do osi odciętych i osi rzędnych. Po zaakceptowaniu (w większości przypadków można przyjąć domyślny układ osi współrzędnych) zostanie wyświetlone rozwiązanie zadania decyzyjnego metodą geometryczną – w tym przypadku jest to rozwiązanie przykładu 1.1, co przedstawiono na rys. 1.7.

Obszar zakreskowany stanowi zbiór rozwiązań dopuszczalnych $X$. Wynika on z dwóch warunków ograniczających (`C1` i `C2`) oraz warunku brzegowego ($x_1, x_2 \geqslant 0$). Prosta oznaczona symbolem C1 wyznacza półpłaszczyznę z warunku ograniczające-

[5] Jest to pomocne w przypadku zadań, w których występuje kilkaset lub więcej zmiennych i kilkaset lub więcej warunków ograniczających.




**Rysunek 1.6.** Okno dialogowe przypisania zmiennych decyzyjnych do osi odciętych oraz osi rzędnych




**Rysunek 1.7.** Graficzne rozwiązanie zadania programowania liniowego z przykładu 1.1

go (1.6). Przykładowo, podstawiając za zmienne decyzyjne $x_1 = 1$ i $x_2 = 1$, widzimy, że spełniona jest nierówność (1.6). Oznacza to, że nierówność ta jest spełniona przez punkty leżące na prostej C1 i w półpłaszczyźnie poniżej tej prostej. Podobnie prosta C2 wyznacza półpłaszczyznę na podstawie warunku ograniczającego (1.7). Łatwo sprawdzić, iż każda wartość zmiennej $x_2$ mniejsza bądź równa 3 spełnia nierówność (1.7). Uwzględniając warunek brzegowy zakładający nieujemność zmiennych decyzyjnych (na jego podstawie rozwiązanie optymalne musi znajdować się w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych), otrzymujemy zbiór rozwiązań dopuszczalnych[6].

[6] Ograniczony z góry zbiór rozwiązań dopuszczalnych dla zadania na maksimum określa się wielościanem wypukłym.

Program automatycznie wyznacza warstwicę funkcji celu przechodzącą przez punkty wierzchołkowe zbioru rozwiązań optymalnych, w których funkcja celu osiąga ekstremum (pogrubiona prosta na rys. 1.7). Innymi słowy, warstwica funkcji celu przechodzi przez te punkty zbioru rozwiązań optymalnych, gdzie uzyskuje największą wartość dla zadania na maksimum, co stanowi rozwiązanie optymalne.

Odbywa się to za pomocą wyznaczenia kierunku najszybszego wzrostu wartości funkcji kryterium poprzez jej gradient, będący wektorem pochodnych cząstkowych funkcji celu. Dla maksymalizowanej funkcji celu $z = 1000x_1 + 2000x_2 \rightarrow \max$ gradientem – wektorem pochodnych cząstkowych po zmiennych decyzyjnych – jest: $\nabla z = [1000; 2000]$. Największa wartość funkcji celu w zbiorze rozwiązań dopuszczalnych $X$ zostanie osiągnięta poprzez przesunięcie warstwicy jak najdalej od przecięcia osi współrzędnych, przechodzącej jednocześnie przez co najmniej jeden punkt wspólny, z obszarem rozwiązań dopuszczalnych.

Punkt stanowiący rozwiązanie optymalne jest zaznaczony pogrubioną kropką na rys. 1.7 i jak widać jest on na przecięciu prostych C1 i C2 (jednoelementowe rozwiązanie optymalne). Współrzędne rozwiązania optymalnego można odczytać z wykresu lub, jeżeli jest to niemożliwe, wyznaczyć analitycznie, rozwiązując układ równań warunków ograniczających (1.6)–(1.7)[7]. W prawym górnym rogu wykresu program podaje współrzędne rozwiązania optymalnego: $\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, przy którym wartość funkcji celu osiąga poziom maksymalny wynoszący $z_{\max} = 7000$, co stanowi rozwiązanie optymalne. Czytelnikowi pozostawiamy sprawdzenie, czy wartość funkcji celu (1.5) osiąga wskazany wynik przy podstawieniu za zmienne decyzyjne powyższych wartości.

Z przeprowadzonej analizy wynika, iż przedsiębiorstwo powinno dziennie produkować 1 tonę produktu $P_1$ i 3 tony produktu $P_2$, co daje łączny zysk w wysokości 7000 złotych[8]. ■

W zadaniu programowania liniowego z przykładu 1.1 otrzymaliśmy jedno rozwiązanie optymalne. Zgodnie z podziałem zadań programowania liniowego zaprezentowanym na rys. 1.1, powyższe zadanie posiada skończone rozwiązanie optymalne, istniejące tylko w jednym punkcie. Jednakże, jak już wspomniano, jeżeli zadanie liniowe nie jest sprzeczne, rozwiązań optymalnych może być nieskończenie wiele. Wykażemy to w przykładzie 1.2.

[7] W rzeczywistości warunki ograniczające (1.6)–(1.7) są nierównościami, choć w celu wyznaczenia tych dwóch prostych nierówności te są sprowadzane do równości (punkt przecięcia leży na obu prostych). Innym sposobem znalezienia rozwiązania jest obliczenie wartości funkcji celu (1.5) dla każdego wierzchołka wielościanu wypukłego (zbioru rozwiązań dopuszczalnych) z rys. 1.7. Wówczas największa wartość – funkcja (1.5) jest maksymalizowana – wskazuje punkt rozwiązania optymalnego. Jeżeli funkcja celu jest na minimum, najmniejsza wartość wskazuje wierzchołek ze zbioru rozwiązań optymalnych stanowiący rozwiązanie zadania decyzyjnego. Podejście to jest żmudne i pracochłonne dla zadań z większą liczbą zmiennych i warunków ograniczających.

[8] Należy podkreślić, iż cena za każdą tonę jest stała, niezależnie od przyjętego programu produkcji i wielkości jej sprzedaży. W przypadku, gdy zysk ulegałby zmianie przy zamówieniu przekraczającym pewną ilość danego produktu, wówczas zastosowanie liniowej funkcji celu wyrażającej łączny zysk byłoby podejściem błędnym. W takim przypadku należy zastosować funkcję nieliniową i w konsekwencji metody rozwiązywania optymalizacyjnych zadań nieliniowych.

**Przykład 1.2.**
Przedsiębiorstwo produkuje dwa produkty ($P_1$ i $P_2$), z których zysk wynosi odpowiednio: 10 tys. zł i 8 tys. zł. Produkcja jest wykonywana na dwóch maszynach ($M_1$ i $M_2$). Maksymalna ilość roboczogodzin w danym okresie maszyny pierwszej wynosi 4 tys. godz., drugiej zaś – 2 tys. godz. Pracochłonność poszczególnych maszyn niezbędna do wyprodukowania 1 tony powyższych produktów zaprezentowano w tabeli 1.2.

**Tabela 1.2.** Pracochłonność maszyn wykorzystywanych w produkcji oraz limit ich wykorzystania

| Produkt / Surowiec | $P_1$ | $P_2$ | Maksymalna ilość roboczogodzin |
|---|---|---|---|
| **$M_1$ [tys. godz.]** | 1 | 0,8 | 4 |
| **$M_2$ [tys. godz.]** | 0,3 | 1 | 2 |

Źródło: opracowanie własne.

Należy określić optymalny plan produkcji, aby uzyskać największy zysk.

**Rozwiązanie**

Ponownie jako $x_1$ oznaczamy 1 tonę produktu $P_1$, a jako $x_2$ 1 tonę produktu $P_2$. Zadanie programowania liniowego przyjmuje postać poniższego modelu

$$z = 10x_1 + 8x_2 \rightarrow \max, \tag{1.9}$$

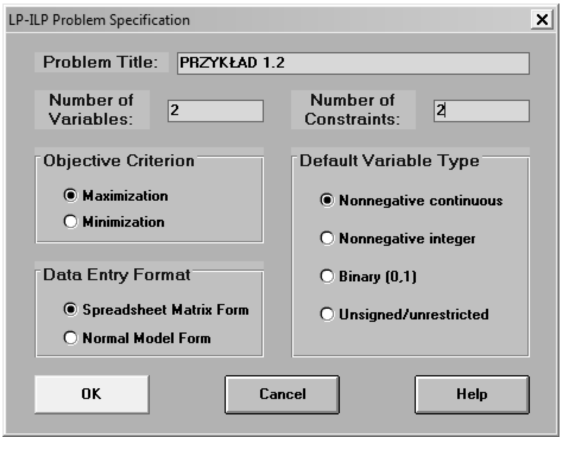
przy warunkach ograniczających

$$x_1 + 0{,}8x_2 \leqslant 4 \tag{1.10}$$

$$0{,}3x_1 + x_2 \leqslant 2 \tag{1.11}$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0, \tag{1.12}$$

gdzie funkcja (1.9) jest funkcją celu na maksimum, nierówności (1.10)–(1.11) warunkami ograniczającymi, a nierówność (1.12) warunkiem brzegowym zadania programowania liniowego.




**Rysunek 1.8.** Okno specyfikacji problemu decyzyjnego dla zadania z przykładu 1.2