1 Pomiar dochodowości inwestycji – istota, odmiany i cechy stóp zwrotu

Wprowadzenie

Podstawową miarą wykorzystywaną do oceny opłacalności inwestycji jest stopa zwrotu. Drugim obok niej miernikiem efektywności inwestycji jest poziom dochodu, jaki inwestor osiągnął lub jaki zamierza osiągnąć. Obie te miary są ściśle ze sobą powiązane. Dochód jest miarą sumarycznego efektu finansowego, a stopa zwrotu w ogólnym sensie definicyjnym określa dochód, jaki przypada na jednostkę zainwestowanego kapitału. Jest to najbardziej ogólne, ale też najbardziej podstawowe ujęcie tej miary, której formalny wyraz jest następujący:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{N} D_i}{\sum_{i=1}^{N} N_i},$$

gdzie: R – stopa zwrotu, D_i – i-ty rodzaj osiągniętego dochodu, np. różnica kursów, dywidenda, odsetki, N_i – i-ty rodzaj poniesionych nakładów, zaangażowanego kapitału dla osiągnięcia dochodu D, np. zaangażowane zyski okresów wcześniejszych, inwestycyjnie zaangażowany kredyt.

Tak rozumiana stopa zwrotu może być obliczona z danych historycznych i traktowana wówczas jako miara osiągniętej sprawności finansowej, może także być rozumiana jako wartość oczekiwana, w rachunku *ex ante*, jako wyznacznik podjęcia decyzji inwestycyjnej. W tym drugim znaczeniu ogólny wzór na stopę zwrotu, która staje się oczekiwaną stopą $\mathrm{E}(R)$, jest wyrażony jako:

$$\mathrm{E}(R) = \frac{\mathrm{E}(D)}{\sum\limits_{i=1}^{N} N_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} \mathrm{E}(D_i)}{\sum\limits_{i=1}^{N} N_i},$$

gdzie: $\mathrm{E}(D)$ – oczekiwany poziom sumarycznego dochodu.

Inwestor może oczekiwać, że stopa zwrotu będzie oscylować wokół pewnej wartości oczekiwanej. W tym sensie stopa zwrotu jest zmienną losową realizującą się z określonym prawdopodobieństwem. Jeżeli zmienna losowa przyjmuje skończoną liczbę wartości (rozkład dyskretny), to wartość oczekiwana tej zmiennej jest równa:

$$\mathrm{E}(R) = \sum_{k=1}^{n} p_k R_k,$$

gdzie: $\mathrm{E}(R)$ – oczekiwana stopa zwrotu, R_k – k-ta możliwa stopa zwrotu, p_k – prawdopodobieństwo zrealizowania się takiego scenariusza, który sprzyja osiągnięciu stopy zwrotu R_k, n – liczba rozpatrywanych stóp zwrotu o niezerowym prawdopodobieństwie realizacji.

Z powyższego wzoru wynika, że oczekiwana stopa zwrotu jest średnią ważoną możliwych do osiągnięcia stóp zwrotu, przy czym wagami są prawdopodobieństwa ich osiągnięcia, które mogą być wyznaczone subiektywnie (opinie ekspertów) lub zgodnie z zasadami rachunku prawdopodobieństwa – jako częstości występowania danej stopy zwrotu:

$$p_k = \frac{m_k}{m},$$

gdzie: m_k – liczba przypadków, gdy stopa zwrotu osiągnęła wartość R_k, m – liczebność zbioru obserwacji.

Wychodząc od samej idei stopy zwrotu i uwzględniając dwa wymienione tu czynniki, do podstawowych metodycznych odmian stóp zwrotu należy zaliczyć:

- prostą stopę zwrotu,
- logarytmiczną stopę zwrotu,
- geometryczną stopę zwrotu.

Dodatkowo każda z wymienionych stóp w dwojaki sposób może być odnoszona do inflacji. W tym sensie stopa zwrotu może być nominalna (stopa zwrotu zawiera w sobie stopę inflacji) lub realna (stopa nominalna jest skorygowana poziomem inflacji). Wreszcie w zależności od sposobu uwzględniania okresowej kapitalizacji dochodów stopa zwrotu może być nominalna bądź efektywna.

Jeżeli początkową wartość inwestycji oznaczymy jako *PV* (*present value*) – może to być np. cena zakupu akcji lub portfela instrumentów finansowych –

końcową wartość inwestycji jako *FV* (*future value*), to prosta stopa zwrotu R jest wyliczona jako:

$$R = \frac{FV - PV}{PV} = \frac{FV}{PV} - 1.$$

Przykładowo dla instrumentu finansowego o cenie zakupu P_{t-1} i cenie sprzedaży P_t oraz przy założeniu, że na dochód składa się jedynie różnica cen, prosta stopa zwrotu to:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1.$$

W przypadku gdy na dochód oprócz różnicy cen składają się inne pożytki, np. uzyskana dywidenda, prosta stopa zwrotu przybiera postać:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1} + D_t}{P_{t-1}},$$

gdzie: D_t – dochód uzyskany w okresie t.

Ponieważ prosta stopa zwrotu dotyczy całego okresu trwania inwestycji, wzór można uogólnić tak, że dla n-okresowej inwestycji przyjmuje on postać:

$$R_t(n) = \frac{P_t - P_{t-n}}{P_{t-n}} = \frac{P_t}{P_{t-n}} - 1.$$

Jeżeli w trakcie n-okresowej inwestycji inwestor uzyskiwał dodatkowe korzyści (np. dywidendy), to prosta stopa zwrotu jest liczona jako:

$$R_t(n) = \frac{P_t - P_{t-n} + \sum\limits_{j=0}^{n-1} D_{t-j}}{P_{t-n}}.$$

Jak wiadomo z podstaw matematyki finansowej, w przypadku kapitalizacji skokowej (dyskretnej) wartość przyszła kapitału po n okresach, np. n latach, kształtuje się następująco:

$$FV = PV(1 + r)^n.$$

Jeśli zaś kapitalizacja występuje m-krotnie w ciągu roku, to:

$$FV = PV\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn}.$$

Jeżeli liczba podokresów, w których jest dokonywana kapitalizacja w ciągu roku, będzie rosła aż do nieskończoności ($m \to \infty$), to przedział czasowy pomiędzy kolejnymi przyrostami kapitału dążyć będzie oczywiście do zera. W granicy uzyskuje się:

$$\lim_{m \to \infty}\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn} = \mathrm{e}^{rn}.$$

Granica ta definiuje sposób kapitalizacji ciągłej. W takim przypadku prawdziwe są relacje:

$$K_1 = K_0 \mathrm{e}^r,$$

gdzie: K_1 – wartość kapitału w momencie 1 (wartość końcowa), K_0 – wartość kapitału w momencie 0 (wartość początkowa), oraz w uogólnieniu dla n lat:

$$FV = PV\mathrm{e}^{rn}.$$

Przedstawione ujęcie zagadnienia upraszczająco zakłada, że stopy procentowe r w każdym okresie były równe. Jeżeli założenie to nie jest spełnione, to przedstawiony wzór należy rozwinąć do postaci:

$$FV = PV \prod_{t=1}^{n} \mathrm{e}^{r_t} = PV\mathrm{e}^{\sum\limits_{t=1}^{n} r_t}.$$

Przyrost kapitału będzie oczywiście tym szybszy, im większa będzie częstotliwość kapitalizacji w jednym okresie. Granicą tempa przyrostu jest kapitalizacja ciągła.

Z właściwości logarytmów wynika ważna (zwłaszcza w przypadku badań giełdowych) cecha logarytmicznych stóp zwrotu, a mianowicie ich addytywność. Suma poszczególnych logarytmicznych stóp zwrotu z danego okresu jest tożsama z logarytmiczną stopą zwrotu uwzględniającą tylko wartość końcową i początkową w danym okresie.

Oznacza to, że każda n-okresowa logarytmiczna stopa zwrotu jest sumą jednookresowych logarytmicznych stóp zwrotu. Można to wykazać, odwołując się do wspomnianych wcześniej indeksów dynamiki wraz z podstawowym, przedstawionym tu wzorem na postać logarytmicznej stopy zwrotu. Jeżeli relacja (*FV*/*PV*) dla jednego okresu (P_t/P_{t-1}) jest indeksem I_t oraz w uogólnieniu dla n-okresów (P_t/P_{t-n}) jest indeksem $I_t(n)$, wówczas zachodzi:

$$R_{\ln,t}(n) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-n}}\right) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \cdot \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \cdot \frac{P_{t-2}}{P_{t-3}} \cdot \ldots \cdot \frac{P_{t-n+1}}{P_{t-n}}\right).$$

Ponieważ logarytm iloczynu jest równy sumie logarytmów, zapisane równanie jest równoważne zależności:

$$R_{\ln,t}(n) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) + \ln\left(\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}}\right) + \ln\left(\frac{P_{t-2}}{P_{t-3}}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{P_{t-n+1}}{P_{t-n}}\right) =$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} \ln\left(\frac{P_{t-j}}{P_{t-j-1}}\right)$$

i ostatecznie:

$$R_{\ln,t}(n) = \sum_{j=0}^{n-1} \ln\left(\frac{P_{t-j}}{P_{t-j-1}}\right) = \sum_{j=0}^{n-1} R_{\ln,t-j}.$$

Średnia stopa zwrotu

Aby było możliwe porównywanie stóp zwrotu inwestycji o różnym czasie ich trwania, prostą stopę zwrotu należy przeliczyć na stopę średnią jednookresową. W najprostszym ujęciu takie przeliczenie wymaga najpierw zdefiniowana długości jednego okresu, np. roku, a następnie podzielenia prostej stopy zwrotu za okres przetrzymania przez liczbę okresów trwania inwestycji, czyli:

$$\overline{R} = \frac{1}{n}R = \frac{1}{n}\left(\frac{FV - PV}{PV}\right) = \frac{FV - PV}{nPV},$$

gdzie: $\overline{R}$ – średnia prosta jednookresowa stopa zwrotu z inwestycji, *FV* – wartość końcowa (przyszła) inwestycji, *PV* – wartość bieżąca inwestycji, n – liczba okresów trwania inwestycji.

Trzeba też dodać, że w ten sposób oszacowana stopa przeciętna jednookresowa jest wartością przybliżoną, ponieważ nie uwzględnia możliwej reinwestycji dochodów w trakcie trwania inwestycji. W celu poprawnego i dokładnego oszacowania stopy jednookresowej lepiej jest wyznaczyć ją jako średnią geometryczną:

$$\overline{R}_g = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1.$$

Korzystając z przedstawionych wzorów zakłada się, że znana jest końcowa wartość inwestycji. Warunek ten nie zawsze jest spełniony, ponieważ w ocenie inwestycji może chodzić o oszacowanie jej końcowej wartości. Wówczas *FV* jest niewiadomą. W takim przypadku – odwołując się ponownie do podstawowych zasad matematyki finansowej – wartość przyszła zależy od stopy procentowej lub stóp procentowych właściwych dla ocenianej inwestycji.

Ogólny wzór na wartość przyszłą wykorzystujący wyrażenie $(1 + r)^n$, gdzie n jest liczbą okresów trwania inwestycji, milcząco zakłada równość stóp procentowych (r) w każdym okresie. Jeżeli stopy te w poszczególnych okresach nie są równe, to wyrażenie to ulega przekształceniu do postaci $\prod_{t=1}^{n}(1 + r_t)$. Aby pomiędzy wymienionymi wyrażeniami zachodziła równość, stopa r musiałaby być na poziomie wartości średniej geometrycznej. Ta zależność jest podstawą do wyznaczenia geometrycznej stopy zwrotu w jej kolejnej odmianie.

Wychodząc od ogólnej równości:

$$(1 + \overline{r})^n = \prod_{t=1}^{n}(1 + r_t)\,,$$

należy tak przekształcić tę zależność, aby otrzymać średnią stopę jednookresową, czyli:

$$1 + \overline{r} = \sqrt[n]{\prod_{t=1}^{n} (1 + r_t)},$$

a ostatecznie wzór na geometryczną stopę zwrotu:

$$\overline{r} = \sqrt[n]{\prod_{t=1}^{n} (1 + r_t)} - 1 = \overline{R}_g.$$

Pod pojęciem efektywnej stopy zwrotu należy rozumieć taką stopę roczną, której poziom jest ekwiwalentny z poziomem dowolnej stopy procentowej, uwzględniającej częstotliwość kapitalizacji w skali jednego roku. Innymi słowy stopa efektywna jest taką hipotetyczną stopą, która równoważy każdą stopę podlegającą kapitalizacji częściej niż jeden raz w roku. Przyjmowanie roku jako jednego okresu jest powszechne i w praktyce daje najszersze możliwości porównań, jednak sama definicja jednego okresu również może być umowna.

Wyprowadzenie wzoru na poziom efektywnej stopy zwrotu jest możliwe, gdy wyjdziemy od równości, która musi być spełniona dla efektywnej stopy zwrotu (r_{ef}), jeśli ma ona równoważyć stopę wielokrotnej kapitalizacji. Niech r oznacza nominalną roczną stopę oprocentowania, m – krotność kapitalizacji, K_0 – wartość początkową, a K_1 – wartość po jednym roku (jednym okresie). Wtedy zachodzi równość:

$$r_{ef} = \frac{K_1 - K_0}{K_0} = \frac{K_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - K_0}{K_0} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1.$$

Jak wynika z przedstawionego rozumowania oraz wcześniejszych zapisów, przyrost kapitału w jednym roku (jednym okresie), dla m-krotnej w tym czasie kapitalizacji następuje w tempie $\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$ (r jest roczną stopą nominalną). Jeżeli m rośnie, stopa efektywna – ceteris paribus – jest coraz wyższa. W granicy znów mamy do czynienia z kapitalizacją ciągłą. Powstaje zatem pytanie o postać stopy efektywnej w warunkach kapitalizacji ciągłej. Czynnik oprocentowujący w tym przypadku wynosi:

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m = \mathrm{e}^r.$$

Łącząc przedstawioną zależność z postacią stopy efektywnej dla n-okresowej inwestycji, otrzymamy stopę efektywną dla kapitalizacji ciągłej wyrażoną wzorem:

$$r_{ef} = \sqrt[n]{\mathrm{e}^{rn}} - 1,$$

co można zapisać jako:

$$r_{ef} = e^r - 1.$$

Wpływ inflacji na poziom stopy zwrotu

Jeżeli inwestor uzyskuje stopę zwrotu na poziomie x i w tym samym czasie inflacja była na poziomie inf, to oczywiście realny dochód jest dochodem nominalnym skorygowanym poziomem inflacji, jednakże prosta konstatacja, że wystarczy od stopy nominalnej x odjąć poziom inflacji inf jest nieprawdziwa. Oznaczając stopę nominalną jako R_N, chcemy wiedzieć, jaka jest stopa zwrotu inwestora uwzględniająca inflację, czyli jaki jest poziom realnej stopy zwrotu R_R.

Po upływie roku kapitał K_1 inwestora będzie równy $K_0(1 + R_N)$, a koszyk dóbr o początkowej wartości K_0 po roku kosztować będzie $K_0(1 + inf)$. Na początku roku inwestor mógł nabyć dokładnie jeden taki koszyk, wydatkując kwotę K_0, po roku zaś może nabyć $\frac{K_0(1+R_N)}{K_0(1+inf)}$ koszyka. Ponieważ stopa zwrotu jest miarą przyrostu kapitału, realny przyrost wartości K_0 jest przedstawionym ilorazem pomniejszonym o jeden jako ekwiwalent wartości koszyka, jaki inwestor mógł nabyć na początku roku. A zatem realny przyrost wartości wynosi:

$$1 + R_R = \frac{K_0(1 + R_N)}{K_0(1 + inf)} \Rightarrow R_R = \frac{K_0(1 + R_N)}{K_0(1 + inf)} - 1.$$

Uogólniając i biorąc pod uwagę, że wartości K_0 w liczniku i mianowniku redukują się, otrzymamy realną stopę zwrotu określoną równaniem:

$$R_R = \frac{1 + R_N}{1 + inf} - 1.$$

Przykłady

Przykład 1.1.
Inwestor zakupił 50 akcji Spółki Budimex S.A. po cenie 120,81 zł za akcję. W czasie trwania inwestycji Spółka wypłaciła dywidendę w wysokości 6 zł na akcję. Inwestor zakończył inwestycję, sprzedając posiadane akcje po cenie 128,80 zł. Ile wynosi dochód oraz stopy zwrotu tej inwestycji: prosta i logarytmiczna?

Rozwiązanie:
Dochód:

$$D = (128{,}80 - 120{,}81 + 6) \cdot 50 = 699{,}50 \text{ zł}.$$

Prosta stopa zwrotu wynosi:

$$R = \frac{128{,}80 - 120{,}81 + 6}{120{,}81} = 11{,}58\%$$

lub, inaczej licząc:

$$R = \frac{128{,}80 + 6}{120{,}81} - 1 = 11{,}58\%.$$

Logarytmiczna stopa zwrotu wynosi

$$R_{\ln} = \ln\left(\frac{128{,}80 + 6}{120{,}81}\right) = 10{,}96\%.$$

Zauważamy, że dochód jest zawsze zależny od liczby nabytych akcji, a do obliczenia stopy zwrotu liczba nabytych akcji nie ma znaczenia. Stopa zwrotu jako względna miara dochodowości jest niezależna od skali inwestycji, ponieważ zarówno dochód, jak i nakład (cena zakupu akcji) rosną w tym samym tempie.
Stopa logarytmiczna zakładająca warunki kapitalizacji ciągłej jest zawsze niższa od stopy prostej obliczonej dla tych samych wartości.

Przykład 1.2.
Fundusz inwestycyjny zakupił akcje Spółki Lotos S.A. po cenie 24,67 zł za akcję. Po trzech latach sprzedał akcje po cenie 31,23 zł za akcję. W każdym roku wypłacano dywidendę (wysokość dywidendy podano w tabeli). Dywidendy były reinwestowane każdorazowo do końca okresu inwestycji, po stopie o 1 punkt procentowy wyższej od stopy inflacji w danym roku. Dla tej inwestycji obliczymy:

a) prostą stopę zwrotu,
b) roczną geometryczną stopę zwrotu,
c) realną prostą stopę zwrotu oraz realną roczną geometryczną stopę zwrotu.

Rok	Stopa inflacji	Dywidenda
1	3,24%	1,00 zł
2	2,67%	1,50 zł
3	1,09%	0,50 zł

Rozwiązanie:
W celu obliczenia stóp zwrotu wyliczamy najpierw wartość końcową (*FV*) inwestycji, która jest sumą ceny sprzedaży oraz uzyskanych i reinwestowanych dywidend. Zauważamy, że pierwsza z dywidend mogła być reinwestowana przez dwa lata, druga przez rok, a trzecia nie była reinwestowana. Stopy reinwestycji, będąc o 1 punkt procentowy wyższe od stopy inflacji, wynosiły 3,67% oraz 2,09%. Zatem wartość przyszła (końcowa) inwestycji wynosi:

$$FV = 31{,}23 + 1 \cdot (1 + 3{,}67\%) \cdot (1 + 2{,}09\%) + 1{,}50 \cdot (1 + 2{,}09\%) + 0{,}50 = 34{,}32 \text{ zł}.$$

a) Prosta stopa zwrotu wynosi:

$$R = \frac{34{,}32}{24{,}67} - 1 = 39{,}12\%.$$

b) Stopa geometryczna jest stopą średnią jednookresową, przy czym definicja jednego okresu jest umowna. Oznacza to, że trzyletnia inwestycja składa się z trzech okresów rocznych, trzydziestu sześciu okresów miesięcznych itd. W tym zadaniu pod pojęciem okresu rozumie się jeden rok, co dla celów porównywania inwestycji jest przypadkiem najczęstszym.

Roczna geometryczna stopa zwrotu wynosi:

$$\overline{R}_g = \sqrt[3]{\frac{34{,}32}{24{,}67}} - 1 = 11{,}63\%.$$

Gdyby należało obliczyć np. miesięczną stopę geometryczną, wówczas we wzorze powyżej pierwiastek byłby trzydziestego szóstego stopnia, co daje:

$$\overline{R}_g = \sqrt[36]{\frac{34{,}32}{24{,}67}} - 1 = 0{,}92\%.$$

c) Obliczenie stopy realnej polega na uwzględnieniu stopy inflacji, która pomniejsza według równania Fishera poziom stopy nominalnej. Obliczona wcześniej stopa prosta jest stopą nominalną, a prosta stopa realna wynosi:

$$R_R = \frac{1 + 0{,}3912}{(1 + 0{,}0324) \cdot (1 + 0{,}0267) \cdot (1 + 0{,}0109)} - 1 = 29{,}83\%.$$

Oczywiście uzyskany wynik jest identyczny z tym, jaki otrzymujemy w wyniku zastosowania równania Fishera.
Ponieważ stopa geometryczna jest stopą średnią, więc obliczenie realnej stopy geometrycznej wymaga najpierw obliczenia realnej wartości końcowej inwestycji, a następnie ponownego obliczenia stopy geometrycznej, która w tym przypadku będzie realną stopą geometryczną.

$$FV_R = \frac{34{,}32}{(1 + 0{,}0324) \cdot (1 + 0{,}0267) \cdot (1 + 0{,}0109)} - 1 = 32{,}03 \text{ zł}.$$

Geometryczna realna roczna stopa zwrotu wynosi zatem:

$$\overline{R}_{R,g} = \sqrt[3]{\frac{32{,}03}{24{,}67}} - 1 = 9{,}09\%.$$

Dodatkowo zauważamy, że znając realny poziom wartości końcowej inwestycji (32,03 zł), prostą realną stopę zwrotu można otrzymać z ilorazu:

$$R_R = \frac{32{,}03}{24{,}67} - 1 = 29{,}83\%.$$

Przykład 1.3.
Inwestor w ciągu 10 lat powiększył swój kapitał o 300%. Ile wynosi jego średnioroczna stopa zwrotu?

Rozwiązanie:
Jeżeli kapitał wzrósł o 300%, tzn. że jego wartość końcowa stanowi czterokrotność wartości początkowej. Stopa średnioroczna jest stopą geometryczną:

$$\overline{R}_g = \sqrt[10]{4} - 1 = 14{,}87\%.$$

Przykład 1.4.
Na rachunku bankowym zdeponowano kwotę 10 000 zł. W pierwszym roku trwania inwestycji oprocentowanie wyniosło 8%, w drugim 3%, w trzecim 6%. W okresie trwania inwestycji indeks cen konsumpcyjnych wzrósł z poziomu 145,75 do 152,60. Obliczymy:

a) prostą stopę zwrotu oraz logarytmiczną stopę zwrotu za okres przetrzymania,
b) stopy zwrotu: średnią roczną prostą, logarytmiczną oraz geometryczną,
c) realną prostą stopę zwrotu oraz logarytmiczną realną stopę zwrotu za okres przetrzymania,
d) stopy zwrotu: średnią realną roczną prostą, geometryczną oraz logarytmiczną.

Rozwiązanie:

a) Obliczenie stóp zwrotu za okres przetrzymania polega w tym przypadku na oszacowaniu wartości końcowej inwestycji, a następnie podstawieniu do podstawowych wzorów na prostą stopę zwrotu oraz logarytmiczną stopę zwrotu:

$$FV = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}08) \cdot (1 + 0{,}03) \cdot (1 + 0{,}06) = 11\,791{,}44 \text{ zł.}$$

$$R = \frac{11\,791{,}44}{10\,000} - 1 = 17{,}91\%.$$

Prostą stopę można obliczyć także w alternatywny sposób, wykorzystując jedynie wartości stóp jednokresowych. Stopa prosta jest wówczas obliczona jako procent złożony za cały okres trwania inwestycji:

$$R = (1 + 0{,}08) \cdot (1 + 0{,}03) \cdot (1 + 0{,}06) = 17{,}91\%.$$

Stopa logarytmiczna w tym przykładzie jest logarytmem naturalnym ilorazu końcowej i początkowej wartości inwestycji, czyli:

$$R_{\ln} = \ln\left(\frac{11\,791{,}44}{10\,000}\right) = 16{,}48\%.$$

b) Obliczenie stóp jednookresowych jest w przypadku stóp prostej i logarytmicznej ilorazem stóp za okres przetrzymania i liczby okresów:

$$\overline{R} = \frac{1}{3} \cdot 17{,}91\% = 5{,}96\%,$$
$$\overline{R}_{\ln} = \frac{1}{3} \cdot 16{,}48\% = 5{,}49\%.$$

W przypadku stopy geometrycznej, która zawsze jest stopą średnią, wystarczy zastosować wzór na stopę geometryczną. Stopa geometryczna może być obliczona na dwa sposoby. Znając wartość początkową, końcową oraz liczbę podokresów, stopę tę obliczamy jako:

$$\overline{R}_g = \sqrt[3]{\frac{11\,791{,}44}{10\,000}} - 1 = 5{,}65\%.$$

Z kolei znając stopy procentowe w każdym podokresie, równanie stopy geometrycznej ma postać:

$$\overline{R}_g = \sqrt[3]{(1 + 0{,}08) \cdot (1 + 0{,}03) \cdot (1 + 0{,}06)} - 1 = 5{,}65\%.$$

c) Prosta stopa realna może być obliczona z wykorzystaniem równania Fishera. Ponieważ prosta stopa zwrotu dotyczy całego okresu inwestycji, zatem indeks wzrostu cen również obliczamy za cały okres. Stopa wzrostu cen wynosi:

$$i = \frac{152{,}60}{145{,}75} - 1 = 4{,}6998\%.$$

Mając wcześniej obliczoną prostą stopę zwrotu (17,91%), za pomocą równania Fishera obliczamy stopę realną:

$$R_R = \frac{1 + 0{,}1791}{1 + 0{,}046998} - 1 = 12{,}62\%.$$

Obliczenie logarytmicznej realnej stopy zwrotu wymaga znajomości oprócz stopy inflacji również realnej wartości *FV*. Wartość tę można obliczyć jako relację nominalnej wartości *FV* oraz indeksu wzrostu cen. Jeżeli stopa wzrostu cen wynosi 4,7%, to indeks wzrostu wynosi 1,047, a stąd realne *FV* to:

$$FV_R = \frac{11\,791{,}44}{1{,}047} = 11\,262{,}14 \text{ zł}.$$

Stąd logarytmiczna stopa realna wynosi:

$$R_{R,\ln} = \ln\left(\frac{11\,262{,}14}{10\,000}\right) = 11{,}89\%.$$

d) Obliczenie średnich stóp realnych, podobnie jak średnich stóp nominalnych, polega na obliczeniu średnich stóp: prostej, logarytmicznej oraz geometrycznej. Wszystkie stopy w tym przypadku pochodzą od wartości realnych:

$$\begin{aligned}
\overline{R}_R &= \frac{1}{3} \cdot 12{,}62\% = 4{,}21\%,\\
\overline{R}_{R,\ln} &= \frac{1}{3} \cdot 11{,}89\% = 3{,}96\%,\\
\overline{R}_{R,g} &= \sqrt[3]{\frac{11\,262{,}14}{10\,000}} - 1 = 4{,}04\%.
\end{aligned}$$

Przykład 1.5.
Student otrzymaną nagrodę za bardzo dobre wyniki w nauce zdeponował w banku na 4%, przy czym odsetki są dopisywane co dwa miesiące. W ciągu roku opanował podstawy efektywnego inwestowania na rynku akcji i równo po upływie roku wycofał całość środków. Obliczymy:

a) efektywną stopę zwrotu,
b) logarytmiczną efektywną stopę zwrotu,
c) roczną stopę inflacji,
d) roczną logarytmiczną stopę inflacji,
e) realną efektywną stopę zwrotu,
f) realną logarytmiczną efektywną stopę zwrotu, jeżeli inflacja w poszczególnych kwartałach kształtowała się następująco:

Kwartał	1	2	3	4
Inflacja	0,75%	0,62%	0,40%	0,25%

Rozwiązanie:

a) Efektywna stopa zwrotu jako stopa roczna uwzględnia częstotliwość kapitalizacji w skali roku, która w tym przypadku wynosi sześć. Stopę tę obliczamy jako:

$$R_{ef} = \left(1 + \frac{0{,}04}{6}\right)^6 - 1 = 4{,}07\%.$$

b) Obliczenie logarytmicznej efektywnej stopy zwrotu jest możliwe, nawet jeśli nie znamy wartości kapitału początkowego, a zatem i końcowego. Jeżeli prosta efektywna stopa zwrotu jest równa 4,07%, to indeks wzrostu wartości wynosi 1,0407. Stopa logarytmiczna będzie w związku z tym logarytmem naturalnym tego indeksu. Gdyby bowiem hipotetycznie ulokowano 1 zł, to po roku wartość końcowa wynosiłaby 1,0407 zł. Ponieważ obliczona stopa prosta jest stopą efektywną, więc i stopa logarytmiczna też będzie stopą efektywną.

$$R_{ef,\ln} = \ln(1{,}0407) = 3{,}987\%.$$

c) Roczna stopa inflacji na podobieństwo procentu składanego jest iloczynem indeksu inflacji (1+ stopa inflacji w podokresie) pomniejszonym o jeden, czyli:

$$inf = (1 + 0{,}0075) \cdot (1 + 0{,}0062) \cdot (1 + 0{,}004) \cdot (1 + 0{,}0025) - 1 = 2{,}03\%.$$

d) Logarytmiczną stopę inflacji obliczamy podobnie, jak logarytmiczną efektywną stopę zwrotu:

$$inf_{\ln} = \ln(1{,}0203) = 2{,}0142\%.$$

e) Znajomość stopy zwrotu oraz stopy inflacji pozwala obliczyć stopę realną efektywną. W tym celu należy wykorzystać równanie Fishera, w którym stopą nominalną jest stopa efektywna, co daje:

$$R_{R,ef} = \frac{1 + 0{,}0407}{1 + 0{,}0203} - 1 = 1{,}99\%.$$

f) Pewnym podsumowaniem rozumienia wszystkich zależności tego zadania jest obliczenie realnej logarytmicznej efektywnej stopy zwrotu. Jeżeli realna stopa zwrotu wynosi 1,99%, to logarytm naturalny indeksu, czyli $(1 + R_{R,ef})$, będzie poszukiwaną wielkością, czyli logarytmiczną realną efektywną stopą zwrotu:

$$R_{R,ef,\ln} = \ln(1 + 0{,}0199) = 1{,}97\%.$$

Tę samą stopę zwrotu można otrzymać również innym sposobem. Należy zauważyć, że wcześniej zostały już obliczone dwie stopy logarytmiczne: logarytmiczna efektywna stopa zwrotu (3,987%) oraz logarytmiczna stopa inflacji (2,0142%). Z kolei poszukiwana stopa też jest stopą logarytmiczną. Wykorzystując własność, że logarytm ilorazu jest równy różnicy logarytmów otrzymujemy:

$$R_{R,ef,\ln} = 0{,}003987 - 0{,}020142 = 1{,}97\%, \text{ co odpowiada } \ln\left(\frac{1{,}0407}{1{,}0203}\right) = 1{,}97\%.$$

$$R_{R,ef,\ln} = \ln\left(\frac{1{,}0407}{1{,}0203}\right) = 0{,}003987 - 0{,}020142 = 1{,}97\%$$

Przykład 1.6.
Inwestor, rozpatrując możliwe przyszłe scenariusze rozwoju sytuacji zakłada, że z odpowiednim prawdopodobieństwem osiągnie następujące stopy zwrotu:

Scenariusz	Prawdopodobieństwo	Stopa zwrotu
Optymistyczny	20%	18%
Normalny	50%	12%
Pesymistyczny	30%	7%

Obliczymy średnią oczekiwaną stopę zwrotu.

Rozwiązanie:
Dokonując szacunku stopy zwrotu *ex ante*, otrzymujemy wartość prognostyczną. Stopa zwrotu jest więc oczekiwaną stopą $\mathrm{E}(R)$, będącą zmienną losową realizującą się z określonym prawdopodobieństwem. W omawianym przykładzie średnia oczekiwana stopa zwrotu ma charakter zmiennej dyskretnej (czyli o skończonej liczbie wartości), stanowi więc sumę iloczynów oczekiwanych stóp zwrotu i prawdopodobieństw ich wystąpienia. Oblicza się ją następująco:

$$\mathrm{E}(R) = 0{,}2 \cdot 0{,}18 + 0{,}5 \cdot 0{,}12 + 0{,}3 \cdot 0{,}07 = 0{,}1170.$$

Średnia oczekiwana stopa zwrotu, uwzględniająca opisane powyżej trzy scenariusze kształtowania się poziomu stóp zwrotu wraz z szacowanymi prawdopodobieństwami ich wystąpienia, wynosi 11,70%.

Przykład 1.7.
Za pięć lat upływa termin wykupu przedmiotu leasingu. Zgodnie z umową faktura zostanie wystawiona na kwotę 10 000 zł. Jaką kwotę należy zainwestować teraz, by na czas uzyskać wymagane środki? Do dyspozycji mamy trzy oferty lokat kapitału:
1) Rachunek oszczędnościowy oprocentowany 4,5% w skali roku – odsetki dopisywane co miesiąc;
2) Lokata promocyjna – oprocentowanie 6% rocznie, odsetki dopisywane raz do roku;
3) Obligacje korporacyjne oprocentowane 5,3% w skali roku, kapitalizacja kwartalna.

Która z nich jest najbardziej korzystna?

Rozwiązanie:
W omawianym przykładzie znana jest wartość przyszła zainwestowanego kapitału. W celu wyboru najkorzystniejszej propozycji należy dokonać kalkulacji wartości obecnej tego kapitału. Im mniej zainwestujemy, tym inwestycja bardziej opłacalna. Wykorzystujemy wzór na obecną wartość kapitału w warunkach kapitalizacji dyskretnej. Należy zauważyć, że w dwóch przypadkach odsetki są dopisywane częściej niż raz do roku. Są one reinwestowane, w związku z czym należy wykorzystać wzór uwzględniający efektywną stopę zwrotu.

$$FV = PV\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn}, \quad \text{zatem } PV = \frac{FV}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn}}.$$

Wartość obecna kwoty 10 000 zł dla przedstawionych lokat kapitału wynosi więc odpowiednio:

- dla oferty 1

$$PV = \frac{10\,000}{\left(1 + \frac{0{,}045}{12}\right)^{12 \cdot 5}} = 7988{,}52 \text{ zł},$$

- dla oferty 2

$$PV = \frac{10\,000}{(1 + 0{,}06)^5} = 7472{,}58 \text{ zł},$$

- dla oferty 3

$$PV = \frac{10\,000}{\left(1 + \frac{0{,}053}{4}\right)^{4 \cdot 5}} = 7685{,}42 \text{ zł}.$$

Najbardziej korzystna jest oferta numer 2, ponieważ wymaga ona zainwestowania najniższej kwoty, by finalnie uzyskać 10 000 zł.

Przykład 1.8.
Inwestor może umieścić 100 000 zł na rachunku założonym z myślą o emeryturze. Jeśli konto emerytalne może osiągnąć przeciętnie 8% roczną stopę zwrotu, to ile czasu zajmie uzyskanie z tej inwestycji kwoty 500 000 zł? Zakładamy, że kapitalizacja jest ciągła.

Rozwiązanie:
Przyrost kapitału jest tym szybszy, im większa będzie częstotliwość kapitalizacji w jednym okresie. Granicą tempa przyrostu jest kapitalizacja ciągła, gdzie przedział czasowy pomiędzy kolejnymi kapitalizacjami dąży do zera. Należy więc wykorzystać zmodyfikowany wzór na przyszłą wartość pieniądza w czasie w warunkach kapitalizacji ciągłej:

$$500\,000 = 100\,000 \cdot e^{0{,}08 \cdot n}.$$

W celu obliczenia liczby okresów, po upływie których zainwestowany kapitał zostanie odpowiednio skapitalizowany, należy przekształcić powyższy wzór następująco:

$$n = \frac{[\ln(500\,000) - \ln(100\,000)]}{0{,}08} = 20{,}12.$$

Osiągnięcie założonej kwoty zajmie inwestorowi około 20,12 lat.

Zadania

Zadanie 1.1. **
Inwestor dokonał inwestycji na kwotę 50 000 zł, z której dochód (w zł) w poszczególnych okresach (półrocznych) kształtował się następująco: 2000, 1000, 1800, 5000, 17 000, 18 000, 10 000. Półroczna stopa procentowa w tym okresie również podlegała zmianom i jej przeciętny poziom w poszczególnych półroczach wynosił: 4%, 4,5%, 5%, 7%, 6%, 3,5%, 4%. Czy inwestycja była opłacalna?